Keine Ahnung von Quadratischen Gleichungen

Wie löst man eine

Quadratische Gleichung

???

Datei Nr. 12224

Stand 2.4.2020

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Auf meiner Mathe-CD gibt es schon mehrere Texte zu quadratischen Gleichungen.
Dennoch habe ich hier einen kurzen Text der Reihe „Keine Ahnung von …“ angefügt.
Er dient der Wiederholung und soll vor allem Tipps vermitteln.
Man kann diese Gleichungen durch Anwendung der geeigneten Methode optimal und schnell lösen.

Ich habe hier auf die Lösungsmethode durch **quadratische Ergänzung** verzichtet. Die ist umständlich. In der Schule übt man sie dennoch, weil man sie bei anderen Aufgabenstellungen braucht. Nur für quadratische Gleichungen lässt man besser die Finger davon.

Ich habe, um den Text nicht zu lange werden zu lassen, auf zusätzliche Übungsaufgaben verzichtet. Diese findet man in unglaublicher Menge mit ausführlichen Lösungen im Text 12221.

Hier weitere passende Texte auf der Mathe-CD:

12220	Quadratische Gleichungen 1	Sehr ausführlicher Text
12221	Quadratische Gleichungen	Aufgaben aus 12220 – kompakt!
12222	Quadratische Gleichungen	Lernprogramm!
12223	Quadratische Gleichungen	Textaufgaben
12225	Quadratische Gleichungen	Lernblatt: Das Wichtigste zum Lernen
12226	Quadratische Gleichungen	Quadratische Ergänzung, Übungsaufgaben
12230	Gleichungen 3. und 4. Grades, die auf quadratische Gleichungen führen.	

Inhalt

1 Übersicht: Quadratische Gleichungen

1 Eine Gleichung heißt **quadratisch**, wenn man sie auf diese **NORMALFORM** bringen kann:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Beispiel: $x^2 - 4x + 3 = 0$ Hier ist a = 1, b = - 4 und c = 3.

2 Ist b = 0, liegt ein wichtiger Sonderfall vor. Solche Gleichungen nennt man dann **reinquadratisch**. $\boxed{ax^2 + \boxed{0} \cdot x + c = 0}$ kürzer $\boxed{ax^2 + c = 0}$

z. B.: $x^2 + \boxed{0} \cdot x - 4 = 0$ kürzer: $x^2 = 4$

Für reinquadratische Gleichungen gibt es eine sehr einfache Lösungsmethode, die hier auch gezeigt wird.

3 Mit einer ganz ähnlichen Methode kann man sogenannte „**erweiterte reinquadratische** Gleichungen" lösen. Beispiele dafür sind:

$(x-3)^2 = 4$ oder $(x+2)^2 = 11$

4 Ist c = 0, dann liegt eine **quadratische Gleichung ohne Absolutglied** vor.

$\boxed{ax^2 + bc + \boxed{c} = 0}$ kürzer $\boxed{ax^2 + bc = 0}$

$x^2 - 4x + \boxed{0} = 0$ kürzer $x^2 - 4x = 0$

Auch für diese Gleichungen gibt es ein spezielles, einfaches Lösungsverfahren.

5 Eine einfache Form der quadratischen Gleichung liegt vor, wenn a = 1 ist.

Dann schreibt man die Gleichung oft in der Form $\boxed{x^2 + px + q = 0}$

Wie löst man nun die einzelnen Gleichungstypen?

2 Gleichungen der Form $\boxed{ax^2+bx+c=0}$ und $\boxed{x^2+px+q=0}$

$\boxed{1}$ Für $\boxed{ax^2+bx+c=0}$ gibt es die Formel $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(Man nennt sie auch **„Mitternachtsformel“**, weil man sie beim Wecken um Mitternacht noch wissen sollte. Zur Anwendung muss man wissen, dass

a der Koeffizient von x^2 ist,
b der Koeffizient von x und
c das Absolutglied.

Beispiel 1:

$x^2-x-6=0$ mit $a=1$, $b=-1$ und $c=-6$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm5}{2}$$

$$x_1=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad\text{und}\quad x_2=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Beispiel 2:

$2x^2+3x-5=0$ mit $a=2$, $b=-3$ und $c=-5$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\frac{-3\pm7}{4}$$

$$x_1=\frac{-3+7}{4}=\frac{4}{4}=1 \quad\text{und}\quad x_2=\frac{-3-7}{4}=\frac{-10}{5}=-\frac{5}{2}$$

$\boxed{2}$ Für $\boxed{x^2+px+q=0}$ gibt es die Formel $x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}$

Ich löse nun die beiden Beispielgleichungen mit dieser **„p-q-Formel“**

Beispiel 1:

$x^2-x-6=0$ mit $p=-1$ und $q=-6$

$$x_{1,2}=+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-(-6)}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}$$

$$x_1=\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{2}=\tfrac{6}{2}=3 \quad\text{und}\quad x_2=\tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{2}=-\tfrac{4}{2}=-2$$

Beispiel 2:

$\boxed{2}x^2+3x-5=0 \quad |:2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x^2+\tfrac{3}{2}x-\tfrac{5}{2}=0}$

Das war notwendig für die p-q-Formel: $p=\tfrac{3}{2}$ und $q=-\tfrac{5}{2}$

$$x_{1,2}=-\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\tfrac{9}{16}+\tfrac{5}{2}}=-\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\tfrac{9}{16}+\tfrac{40}{16}}=-\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\tfrac{49}{16}}=-\tfrac{3}{4}\pm\tfrac{7}{4}$$

$$x_1=-\tfrac{3}{4}+\tfrac{7}{4}=\tfrac{4}{4}=1 \quad\text{und}\quad x_2=-\tfrac{3}{4}-\tfrac{7}{4}=-\tfrac{10}{4}=-\tfrac{5}{2}$$

Beide Formeln liefern natürlich diesen Lösungszahlen.
Empfehlungen zu den beiden Formeln stehen auf der nächsten Seite.

In meiner langen Erfahrung als Schulleiter und Mathelehrer von Internatsschulen ist es mir unglaublich oft begegnet, dass Schüler <u>nur die p-q-Formel</u> gelernt haben. Die ist mir völlig unverständlich.

Schauen wir uns doch einmal die Lösungen des Beispiels 2 an.

Für die Mitternachtsformel lösen wir die Gleichung $2x^2+3x-5=0$

Die p-q-Formel setzt aber voraus , dass a = 1 ist. Daher müssen wir diese Gleichung noch durch 2 dividieren was oft zu Brüchen führt:

$$x^2+\tfrac{3}{2}x-\tfrac{5}{2}=0$$

Nun lösen wir die Gleichungen mit beiden Formeln:

Mitternachtsformel: $$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\frac{-3\pm 7}{4}=\begin{cases}1\\-\frac{4}{2}\end{cases}$$

p-q-Formel: $$x_{1,2}=-\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\tfrac{9}{16}+\tfrac{5}{2}}=-\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\tfrac{9}{16}+\tfrac{40}{16}}=-\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\tfrac{49}{16}}=-\tfrac{3}{4}\pm\tfrac{7}{4}=\begin{cases}1\\-\frac{5}{2}\end{cases}$$

Die p-q-Formel ist sicher in manchen Aufgaben leicht zu beherrschen. Aber es gibt sehr viele Gleichungen, die wegen der Umformung für a = 1 zu schweren Bruchrechenaufgaben führen.

Zwei Beispiele, die gegen die p-q-Formel sprechen:

Beispiel 3 $5x^2+9x-2=0$ bzw. |:5 $x^2+\frac{9}{5}x-\frac{2}{5}=0$

Lösung mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+40}}{10}=\frac{-9\pm\sqrt{121}}{10}$$
$$=\frac{-9\pm 11}{10}=\begin{cases}\frac{1}{5}\\-2\end{cases}$$

Lösung mit der p-q-Formel:

$$x_{1,2}=-\tfrac{9}{10}\pm\sqrt{\left(\tfrac{9}{10}\right)^2+\tfrac{2}{5}}$$
$$=-\tfrac{9}{10}\pm\sqrt{\tfrac{81}{100}+\tfrac{40}{100}}=-\tfrac{9}{10}\pm\sqrt{\tfrac{121}{100}}$$
$$=-\tfrac{9}{10}\pm\tfrac{11}{10}=\begin{cases}\frac{1}{5}\\-2\end{cases}$$

Beispiel 4 $13x^2-15x+2=0$ bzw. | :13 $x^2-\frac{15}{13}x+\frac{2}{13}=0$

Lösung mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{225-4\cdot 2\cdot 13}}{26}=\frac{15\pm\sqrt{225-104}}{26}$$
$$x_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{121}}{26}=\frac{15\pm 11}{26}=\begin{cases}1\\\frac{2}{13}\end{cases}$$

Lösung mit der p-q-Formel:

$$x_{1,2}=-\frac{15}{26}\pm\sqrt{\left(\frac{15}{26}\right)^2-\frac{2}{13}}$$

und jetzt ????

Konsequenz:

Ich rate allen, mit der allgemeinen Lösungsformel, genannt Mitternachtsformel, zu arbeiten. Sonst kommen bei vielen Gleichungen unliebsame Bruchrechnungen noch dazu.

Wichtige Tipps zur Anwendung der Mitternachtsformel

Beispiel 6: $8x^2 - 8x - 48 = 0$

Wer diese Gleichung unverändert lösen will, kommt zu großen Zahlen:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 8 \cdot 48}}{16} = \frac{8 \pm \sqrt{1600}}{16} = \frac{8 \pm 40}{16} = \begin{cases} \frac{48}{16} = 3 \\ \frac{-32}{16} = -2 \end{cases}$$

*Die Gleichung hat jedoch ein **MERKMAL:*** **Man kann ihre Koeffizienten durch 8 teilen:**

Das ergibt: $x^2 - x - 6 = 0$

Jetzt ist Berechnung einfacher: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Beispiel 7: $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - 8 = 0$

Wer diese Gleichung mit diesen Koeffizienten lösen will, muss so rechnen können:

$$x_{1,2} = \frac{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 8}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{16}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{48}{9}} \right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \pm \frac{7}{3} \right) = 1 \pm 7 = \begin{cases} 8 \\ -6 \end{cases}$$

Brüche erschweren die Rechnung und sind eine Fehlerquelle.
Man sollte sie durch Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner 6 wegschaffen.

Empfohlene Lösung: $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - 8 = 0 \quad | \cdot 6$

ergibt $x^2 - 2x - 48 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 48}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{2 \pm 14}{2} = \begin{cases} 8 \\ -6 \end{cases}$$

Beispiel 8: $\boxed{\frac{1}{2}}x^2 - 4x - 32 = 0$

Der Koeffizient a = $\frac{1}{2}$ ist günstig für die Lösung, darum lässt man ihn stehen:

$$x_{1,2} = \boxed{\frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 32}}{2 \cdot \frac{1}{2}}} = 4 \pm \sqrt{16 + 64} = 4 \pm \sqrt{80} = 4 \pm 4\sqrt{5}$$

Merke: Der Koeffizient $a = \frac{1}{2}$ vereinfacht die Rechnung in zweierlei Hinsicht:
Zum einen entsteht im Nenner $2a = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, also benötigt man gar keinen Bruch mehr und zweitens bleibt der Radikand klein.

Hier zum Vergleich die aufwändigere Lösung der mit 2 multiplizierten Gleichung:

$\frac{1}{2}x^2 - 4x - 32 = 0 \quad | \cdot 2$ ergibt $x^2 - 8x - 64 = 0$ mit

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 64}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 256}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{320}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 \cdot 5}}{2} = \frac{8 \pm 8\sqrt{5}}{2} = \frac{8}{2} \pm \frac{8}{2}\sqrt{5} = 4 \pm 4\sqrt{5}$$

Das war doch oben einfacher.

Flotte Rechner erkennen dieses Merkmal $\boxed{\frac{1}{2}x^2}$ *sofort und lassen den großen kompliziert aussehenden Bruch (oben blau eingerahmt) gleich weg.*

Beispiel 9: $\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0$

In Beispiel 8 war der Bruch $a = \frac{1}{2}$ sehr hilfreich, weil damit der Bruch nicht mehr notwendig war. Hier ist $a = \frac{1}{4}$, was nicht mehr diese Wirkung hat. Daher zeige ich hier zwei Möglichkeiten für die Berechnung der Lösung:

1. Möglichkeit. Vereinfache die Gleichung, indem du sie mit 4 multiplizierst. Dadurch werden die Brüche beseitigt, was die Rechnung vereinfacht!

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0 \qquad | \cdot 4$$

$$x^2 + 8x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-24}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -\frac{-8}{2} \pm \frac{2\sqrt{10}}{2} = -4 \pm \sqrt{10}$$

Hier wurde teilweise die Wurzel gezogen: $\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{10}$

Dann habe ich den Bruch in zwei Einzelbrüche zerlegt und jeweils durch 2 gekürzt!

2. Möglichkeit. Vereinfache die Gleichung, indem du sie mit 2 multiplizierst. Dann wird aus $\frac{1}{4} \cdot 2$ der wichtige Koeffizient $\boxed{\frac{1}{2}}$, so dass man ohne Bruch rechnet:

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0 \qquad | \cdot 2$$

$$\boxed{\tfrac{1}{2}}x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3} = -4 \pm \sqrt{16-6} = -4 \pm \sqrt{10}$$

Hinweis: So würde die Lösung aussehen, wenn man die Gleichung nicht vereinfachen und mit den gegebenen Brüchen rechnen würde:

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - \cancel{4} \cdot \cancel{\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - \frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{-2 \pm \sqrt{\frac{8}{2} - \frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{-2 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} \quad \text{und dann?}$$

Unter der Wurzel wird mit 2 erweitert, damit man die Quadratzahl 4 als Nenner erhält, aus der man die Wurzel ziehen könnte, und dann wird der Bruch mit 2 erweitert, damit der Nenner wegfällt:

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\left(-2 \pm \sqrt{\frac{10}{4}}\right) \cdot 2}{\frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{\left(-2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}\right) \cdot 2}{1} = -4 \pm \sqrt{10}$$

So ist das vieeeeeel komplizierter!

Wie viele Lösungen hat eine quadratische Gleichung?

In den bisherigen Gleichungen haben sich immer zwei Lösungen ergeben.

Nun sehen wir uns die nächsten beiden Gleichungen an:

Beispiel 10: $\mathbf{x^2 - 8x + 16 = 0}$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = 4$$

Wenn der Radikand (das ist die Zahl unter der Wurzel) Null wird, gibt es genau eine Lösung.

Beispiel 11: $\mathbf{x^2 - 3x + 5 = 0}$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Wenn der Radikand negativ wird, gibt es keine Lösung.

Die Schreibweise $\notin \mathbb{R}$ besagt, dass das Ergebnis kein Element der Menge der reellen Zahlen ist.

Beispiel 12: **Für welche Werte von a hat die Gleichung 2, 1 oder keine Lösungen?**

$x^2 + x + 2a = 0$ **ergibt** $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 8a}}{2}$

WISSEN:

Ist der Radikand positiv $\Rightarrow$ 2 Lösungen

Ist der Radikand gleich 0 $\Rightarrow$ 1 Lösung

Ist der Radikand negativ $\Rightarrow$ keine Lösung

Hier heißt der Radikand 1 - 8a.

2 Lösungen: $1 - 8a > 0 \Leftrightarrow 1 > 8a \Leftrightarrow \frac{1}{8} > a \Leftrightarrow \boxed{a < \frac{1}{8}}$:

1 Lösung: $1 - 8a = 0 \Leftrightarrow 1 = 8a \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{8}}$

Keine Lösung: $1 - 8a < 0 \Leftrightarrow 1 < 8a \Leftrightarrow \frac{1}{8} < a \Leftrightarrow \boxed{a > \frac{1}{8}}$

Beispiele: a = - 3: $x^2 + x - 6 = 0$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

$a = \frac{1}{8}$: $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-1}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{-1 \pm 0}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$a = 1$ $\quad x^2 + x + 2 = 0$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R}$

3 Gleichungen ohne Absolutglied

In der Gleichung $x^2 - 3x + 5 = 0$ heißt 5 das Absolutglied, weil es zu keinem x gehört.

Beispiel 13: $\mathbf{x^2 - 3x = 0}$ Lösungsmethode:

Weil jeder Summand x enthält, kann man x ausklammern: $x \cdot (x-3) = 0$

Jetzt liegt ein Nullprodukt vor (links steht ein Produkt, das 0 werden soll).
Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren 0 wird. Wir haben 2 Faktoren:

1. Faktor: $x = 0$
2. Faktor: $(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$ FERTIG!

Anmerkungen:

1. Man erkennt: Fehlt das Absolutglied (d. h. ist es 0), dann ist 0 die erste Lösung.
2. Man kann natürlich auch hier eine der beiden Lösungsformeln einsetzen:

   $x^2 - 3x = 0$ hat a = 1, b = -3 und c = 0.

   $$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{3 \pm 3}{2} = \begin{cases} 3 \\ 0 \end{cases}$$

   Das ist zu viel Aufwand. Die Ausklammermethode ist die beste!

Beispiel 14:

$\mathbf{x^2 + 4x = 0}$

$x(x+4) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -4$

Kürzer geht es nicht mehr.

Beispiel 15:

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x = 0$ | $\cdot 6$ beseitigt die Brüche:

$3x^2 + 2x = 0$ | x ausklammern:

$x(3x+2) = 0$ | Nullprodukt beachten

$x_1 = 0$ und $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{3}$

4 Reinquadratische Gleichungen

Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0$ heißen reinquadratisch, weil der Summand mit x (hoch1) fehlt.

Beispiel 16: $x^2 = 9$ ist eine **reinquadratische Gleichung**.

Hintergrundwissen: Durch Ziehen der Quadratwurzel passiert folgendes:

Rechte Seite: $\sqrt{9} = 3$

Linke Seite: $\cancel{\sqrt{x^2} = x}$ Das ist also falsch, denn

Die Wurzel aus einer Zahl ungleich 0 muss immer positiv sein.

Und wäre x = -3, dann würde diese falsche Lösung bringen:

$\cancel{\sqrt{(-3)^2} = -3}$, also $\cancel{\sqrt{9} = -3}$

Daher muss man unbedingt wissen: $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

Da der Betrag einer Zahl nie negativ ist, geht das so in Ordnung.

Ausführliche richtige Lösung:

$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ (muss man nicht aufschreiben)

$|x| = 3$

Es gibt 2 Zahlen, die den Betrag 3 haben: $x_{1,2} = \pm 3$

Kurzlösung:

$x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm 3$

Aber Vorsicht: Bei Verwendung der Kurzmethode sollte man den Befehl $| \sqrt{\ }$ *weglassen*.
Denn dann wäre die nächste Zeile falsch: $\sqrt{9} = \pm 3$ kann ja nicht sein, denn $\sqrt{9} = 3 > 0$!!!
Nach dem Befehl $| \sqrt{\ }$ müsste die Zeile $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ kommen oder $|x| = 3$, aber diese lässt man ja bei der Kurzmethode weg.

Beispiel 17:

$x^2 - 50 = 0 \quad |$ Kurzlösung!

$x^2 = 50$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$

Aus 50 kann man teilweise die Wurzel ziehen:
$\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Beispiel 18:

$12x^2 = 5$

$x^2 = \frac{5}{12}$

$x^2 = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{15}{36}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{15}{36}} = \pm\frac{1}{6}\sqrt{15}$

Ich habe mit 3 erweitert, damit man im Nenner die Wurzel ziehen kann.

Beispiel 19:

$3x^2 + 8 = 0$

$3x^2 = -8$

$x^2 = -\frac{8}{3}$

$x \notin \mathbb{R}$

Ein Quadrat kann nie negativ sein. Daher gibt es keine reelle Zahl als Wurzel.

5 Gemischte reinquadratische Gleichungen

Die Gleichung $(x-3)^2 = 16$ hat dieselbe Form wie $x^2 = 16$. Man wendet dieselbe Methode an:

Beispiel 20:

$$(x-3)^2 = 16 \quad |\sqrt{\ }$$
$$|x-3| = 4$$
$$|x| = 4$$
$$x-3 = \pm 4 \quad | +3$$
$$x = 3 \pm 4$$
$$x_{1,2} = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases}$$

$$x^2 = 16 \quad |\sqrt{\ }$$
$$\boxed{x_{1,2} = \pm 4}$$

Diese Methode wird selten von Schülern verwendet. Fast alle gehen diesen umständlichen Weg:

$(x-3)^2 = 16$ Binomische Formel anwenden:

$$x^2 - 6x + 9 = 16$$
$$x^2 - 6x - 7 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2}$$
$$x_{1,2} = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases}$$

Beispiel 21:

$$(2x-3)^2 = 5$$
$$|2x-3| = \sqrt{5}$$
$$2x - 3 = \pm\sqrt{5}$$
$$2x = 3 \pm \sqrt{5}$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$x_1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}, \quad x_1 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Aufgaben zum Üben findest Du im Text 12221.